ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

1) Δίνεται η $f(x)=x^2-x-2$.
Να υπολογιστεί το εμβαδόν επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=-2$ και $x=3$

ΛΥΣΗ

- $f(x)=0 \Rightarrow x^2-x-2=0$

$\Delta = 1-4(-2)=9>0$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2} \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

x	-2		-1		2		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$E(\Omega)=\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx-\int_{-1}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{3} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x^2-x-2)\,dx-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-x-2)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{-1}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{3}=$$

$$=-\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{2}}+2+\cancel{\frac{8}{3}}+\frac{4}{2}-\cancel{4}-\left(\cancel{\frac{8}{3}}-\frac{4}{2}-\cancel{4}+\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{2}\right)+$$

$$+\frac{27}{3}-\frac{9}{2}-6-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4=$$

$$=-\frac{1}{3}+\cancel{2}+2-\frac{1}{3}+\frac{27}{3}-\frac{9}{2}\cancel{-6}-\frac{8}{3}+\cancel{2}+4=$$

$$=4-\frac{9}{2}+\frac{17}{3}=\frac{24}{6}-\frac{27}{6}+\frac{34}{6}=-\frac{3}{6}+\frac{34}{6}=$$

$$=\frac{31}{6}\ \text{τ.μ.}$$

2) Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} 3x^2+2, & x\le 0 \\ e^x+1, & x>0 \end{cases}$

α. ΝΔΟ η συνάρτηση f είναι συνεχής

β. Να υπολογιστεί το εμβαδόν επιπέδου χωρίου που περικλείεται απ' την C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$

ΛΥΣΗ

α. $\lim\limits_{x\to 0^-} 3x^2+2 = 2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x+1 = 2$

Αφού, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ η f συνεχής στο

β. $E(\Omega) = \int_{-1}^{0} |3x^2+2|\, dx + \int_0^1 (e^x+1)\, dx =$

$= \int_{-1}^{0} (3x^2+2)\, dx + \int_0^1 (e^x+1)\, dx =$

$= \left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{0} + \left[e^x+x\right]_0^1 =$

$= -\frac{1}{3} - 2 + e + 1 - e^0 = e - \frac{}{3}$

Εμβαδόν μεταξύ C_f και εφαπτομένης

1) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+2$
(α) Να βρεθεί η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $M(2,f(2))$ του (β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τη C_f την ευθεία (ε) και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

ΛΥΣΗ

(α) $f(2)=2^2-2\cdot 2+2=4-4+2=2$

$f'(x)=2x-2 \Rightarrow f'(2)=2\cdot 2-2=2$

$M(2,2)$ και $f'(2)=2=\lambda_\varepsilon$

Άρα,

α' τρόπος

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-f(2)=f'(2)(x-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-2=2(x-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=2x-4+2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=2x-2$$

β' τρόπος

$$y=\lambda x+\beta \Rightarrow 2=2\cdot 2+\beta \Rightarrow \beta=-2$$

Επομένως, $y=2x+2$.

(β) Στην ουσία η $y=2x+2$ αποτελεί μια γραφική παράσταση. Άρα, η διαδικασία είναι γνωστή: $f(x)-y=0 \Rightarrow x^2-2x+2-2x-2=0$
$\Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=0$ ή $x=4$ (η $x=0$ είναι ο $y'y$)

x	0		4
$f(x)-y$		$-$	

Επομένως, $E(\Omega)=-\int_0^4 (x^2-4x)\,dx=$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-2\frac{x^3}{3}\right]_0^4=-\left(\frac{256}{3}-2\frac{64}{3}\right)=$$

$$=\frac{128}{3}-\frac{256}{3}=\frac{128}{3}\ \text{τ.μ}$$

8) Δίνεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 4x - x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
και η ευθεία (ε) με εξίσωση:

$$y = (4-\mu)x, \quad \mu \in (2,4)$$

i) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου της C_f με τον άξονα $x'x$.

ii) Να βρείτε το μ ώστε η ευθεία (ε) χωρίζει το $\underline{\Omega}$ σε 2 ισεμβαδικά χωρία

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) $f(x) = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4-x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 4$

x	0		4
$f(x)$		$+$	

• $E(\Omega) = \int_0^4 f(x)\,dx =$

$$= \int_0^4 4x - x^2\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2 \cdot 16 - \frac{64}{3} =$$

$$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{96-64}{3} = \frac{32}{3} \text{ τ.μ.}$$

ii) $y = (4-\mu)x$, άρα ψάχνω εμβαδόν με (ε) και C_f

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow 4x - x^2 - (4-\mu)x = -x^2 + \mu x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(\mu - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = \mu, \quad \mu \in (2,4)$$

x	0		μ
$f(x)-y$		$+$	

• $E(\Omega_1) = \int_0^\mu (f(x) - y)\,dx =$

$$= \int_0^\mu (\mu x - x^2)\,dx = \left[\frac{\mu x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^\mu =$$

$$= \frac{\mu^3}{2} - \frac{\mu^3}{3} = \frac{3\mu^3 - 2\mu^3}{6} = \frac{\mu^3}{6}.$$

Η ευθεία χωρίζει το $\underline{\Omega}$ σε 2 ισεμβαδικά χωρία.
Επομένως,

$$E(\Omega_1) = \frac{1}{2} E(\Omega) \Rightarrow \frac{\mu^3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu^3 = 32 \Rightarrow \mu = \sqrt[3]{32} \Rightarrow \mu = 2\sqrt[3]{4}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

9) Δίνεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

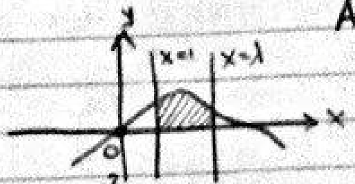
i. Να υπολογιστεί το εμβαδόν $E(\lambda)$, του χωρίου που περικλείεται απ' τη C_f και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ $\forall \lambda > 1$

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$

ΛΥΣΗ

i. $f(x)=0 \Rightarrow x \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x=0$ ή $e^{-x^2}=0$ Αδύνατη

x	0	1	λ
$f(x)$	$+$	$+$	



$$E(\lambda) = \int_1^\lambda f(x)\,dx = \int_1^\lambda x \cdot e^{-x^2}\,dx.$$

Θέτω $x^2 = u \Rightarrow 2x\,dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$

- $x=1$, $u=1$
- $x=\lambda$, $u=\lambda^2$

Επομένως, $\int_1^{\lambda^2} \cancel{x} \cdot e^{-u} \cdot \frac{1}{2\cancel{x}}\,du =$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\lambda^2} e^{-u}\,du = -\frac{1}{2}\left[e^{-u}\right]_1^{\lambda^2} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda^2} + \frac{1}{2}\cdot e^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^{\lambda^2}} \text{ τ.μ.}$$

ii. $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^{\lambda^2}} = \frac{1}{2e}$

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ:

Δίνεται $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 9x^2 \ln x$ $\forall x > 0$

i) Να βρείτε $E(\lambda)$, της C_f του x και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$, $\forall \lambda > 1$

ii) ΝΔΟ $\exists \lambda \in (2, e)$ μοναδικός ώστε $E(\lambda) = 17$.